

Lo *a priori* y el carácter constitutivo de la geometría

Ángel Antonio Ayala Zúñiga*, José Francisco Delgado Orta, Jorge Ochoa Somuano, Omar Antonio Cruz Maldonado, María Alejandra Menéndez Ortiz & Ángel Salvador López Vásquez

Resumen

El presente escrito hace referencia a la noción filosófica de "lo a priori constitutivo". Dicho concepto es deudor directo de la propuesta metodológica de Michael Friedman que intenta demostrar que la interpretación empírica depende de ciertos elementos constitutivos de las teorías científicas. La concepción misma de constitutividad permite entender el rol que juegan algunos aspectos del aparato matemático subyacente a las teorías físico-científicas, como algo más que meras herramientas de cálculo o medición algorítmica. La tesis de los principios constitutivos de Friedman se encamina a mostrar que la interpretación de Willard Van Orman Quine en torno al conocimiento a priori, se erige sobre cimientos endebles y problemáticos. Las sentencias quineanas que desembocan en lo que Friedman llama 'el naturalismo filosófico', terminan por un lado negando la existencia de una parte fundamental de las teorías científicas modernas, a saber, la parte propiamente a priori constitutiva. En este trabajo se analizan algunos de los argumentos que Friedman presenta en contra del naturalismo quineano y se puntualiza el reconocimiento de esta parte constitutiva de algunas teorías Físicas representada por un fundamento geométrico. El escrito a su vez se presenta como una introducción a un trabajo más amplio que tiende a extender la idea de lo a priori constitutivo a otras áreas del pensamiento y la cultura humana.

Palabras clave: *a priori* constitutivo, cambio científico, estructura matemática, Michael Friedman.

Recibido: 26 de septiembre de 2019

Abstract

This work refers to the notion of a philosophical approach named "a priori constitutive". This concept is given since the methodological proposal of Michael Friedman, which attempts to prove that empirical knowledge is based on certain constituent elements of scientific theories. The concept of constitutively is used to understand the role of mathematics in physical-scientific theories, as something more than computation or algorithmic measurement tools. Friedman's constitutively principles thesis gives place to the a priori explanation of Willard Van Orman Quine, which is built over flimsy and troublesome foundations. Quinean sentences defined by Friedman lead to the concept named 'philosophic naturalism', which finishes on the one hand, denying the existence of a fundamental element of the modern scientific theories, namely the constitutive a priori part. So, in this work some Friedman's arguments against the quinean naturalism are reviewed and the recognition of its constitutive part is specified in some Physical theories, represented in terms of a geometric foundation. These principles introduces the context of the 'a priori constitutive' approach, which can be extended to other human thought and culture areas.

Key words: *a priori* constitutive, scientific change, mathematical structure, Michael Friedman.

Aceptado: 15 de julio de 2021.

Instituto de Industrias, Universidad del Mar campus Puerto Escondido. Kilómetro 1.5, carretera federal Puerto Escondido- Sola de Vega, Puerto Escondido, 71980, San Pedro Mixtepec, Oaxaca.

***Autor de correspondencia:** dr.ayala@zicatela.umar.mx (AAAZ)

Lo a priori y el carácter constitutivo de la geometría

Michael Devitt (1996) señala que aquello que se encuentra detrás del naturalismo Quineano reflejado en "*Main Trends in recent philosophy: Two Dogmas of Empiricism*" (1951), es el punto de vista epistemológico del holismo, el así llamado "holismo confirmacional". Bajo esta perspectiva, la interdependencia entre enunciados dentro de un marco teórico determina su propia justificación, es decir, 'la justificación de un enunciado depende de la justificación de todos los demás enunciados relacionados con éste' (Devitt 1996). Si a lo anterior, dice Devitt, agregamos la visión semántica o verificacionista, el significado de una oración, también depende de las demás oraciones, en palabras de Devitt:

[...] 1) Algunas propiedades inferenciales de una oración constituyen su significado. ¿Por qué deberíamos creer esto? El verificacionista tiene una respuesta fácil: porque es parcialmente en virtud de sus propiedades inferenciales que un enunciado es justificado. Si esta es la razón para creer en la premisa uno, entonces, el holismo confirmacional conduce a la segunda. 2) Si algunas de las propiedades inferenciales de una oración constituyen su significado, entonces todas lo hacen. No existe una base de principios para distinguir entre propiedades inferenciales que cuenten como significativas de aquellas que no lo son (Devitt, 1996: 17)¹.

Al afirmar que no existe base de principios que permitan señalar diferencias entre las propiedades inferenciales, Devitt afirma que Quine creyó haber mostrado el punto de la cita anterior. De lo que se

infiere que, para Quine no existe tal conocimiento privilegiado y por tanto tampoco tales distinciones.

Por su parte, David Papineau afirmó que, desde el punto de vista del naturalismo, la filosofía se reduce a formar parte de un marco general constituido por nuestro conocimiento empírico del mundo. Al respecto dice Papineau:

Un último punto en torno a la relación Ciencia y Filosofía: si unimos a la filosofía con la ciencia, no significa que el estatus epistemológico de la ciencia no es en sí mismo un tema propio del debate filosófico. El naturalismo puede perfectamente bien investigar el estatus del conocimiento científico. Todo lo que el naturalismo afirma es que esta investigación, como cualquier otra investigación filosófica, se conducirá mejor dentro del marco de nuestro conocimiento empírico del mundo (Papineau, 1993: 5).

De tal manera que, desde la perspectiva de Papineau, la filosofía como disciplina se concibe, dentro del naturalismo, como una parte más de la ciencia natural empírica.

Ambos puntos de vista tanto el de Devitt como el de Papineau confluyen en lo que podríamos considerar dos ideas centrales del naturalismo Quineano, a saber:

- a) La negación de la existencia del conocimiento tradicionalmente llamado *a priori*.
- b) El punto de vista según el cual la filosofía es entendida como una parte más de la ciencia natural empírica.

En esta línea, Friedman (2001) considera

¹ Las traducciones de las citas del inglés al castellano son responsabilidad del autor.

que el ataque de Quine a la noción de "verdad" en virtud del significado, el rechazo de la distinción carnapiana entre lo analítico y lo sintético, y la consecuente articulación del naturalismo filosófico, descansa sobre una cruda concepción fisicalista de la ciencia natural, la cual constituye el criterio y medida única de toda verdad.

En su *Dynamics of Reason*, Friedman discurre en torno a la idea de que justo este pensamiento quineano, representado por las dos ideas centrales señaladas más arriba, subyace a las diversas concepciones actuales de la filosofía, en las que el naturalismo filosófico parece ser, casi intuitivo, evidente por sí mismo. Sin embargo, a la luz de algunos ejemplos históricos, Friedman intenta mostrar que el pensamiento de Quine, con respecto a la noción de lo *a priori*, resulta seriamente cuestionable, y es que, parece ser que el pensamiento de Quine concibe la noción de lo *a priori* sólo en su sentido kantiano original y no alcanza a percibir todas las implicaciones filosóficas que se desprenden del punto de vista que asume la noción de lo "*a priori*" como un principio liberalizado². Una de estas implicaciones nos conduce a la noción de 'constitutividad', a partir de la cual es posible distinguir una serie de principios que no son determinados empíricamente. Para aclarar este punto, Intentemos reconstruir otro de los argumentos de Friedman en favor de esta posición.

En el contexto del surgimiento y desarrollo de la teoría de la relatividad Einsteiniana, tanto en la teoría especial como en la teoría general, las nociones de "grupo" y "grupo de transformación" que

Klein desarrolló durante las últimas décadas del siglo XIX y la consecuente teoría de las variedades n-dimensionales de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1854/2000), son consideradas como el fundamento geométrico-matemático, constitutivo de la teoría física en cuestión. Sin el desarrollo de esta base geométrica, la formulación de la física relativista ni siquiera podría haber sido esbozada. Para un neo-apriorista como Friedman, esta base constitutiva sería la que permite, en última instancia, la elaboración de hipótesis empíricas, de tal manera que la estructura matemática de la teoría einsteniana no podría ser evaluada empíricamente como sugiere Quine (1951).

La concepción geométrica de Felix Klein (1872/2008) se inserta en el debate en torno al surgimiento de las geometrías no-euclidianas. La noción de "grupo" y "grupo de transformación" que Klein desarrolló dentro de lo que se conoce como el "programa Erlangen", permitieron desarrollar una concepción alterna en la que las distintas geometrías se encuentran caracterizadas por su invariancia con respecto a las transformaciones de un grupo principal. Lo que resulta de lo anterior es que carece de sentido preguntarse ¿cuál geometría es la verdadera? Esto debido a que desde un punto de vista kleiniano, un tipo de geometría en particular no es más o menos verdadera que su contraparte, sólo es un subsistema dentro de un sistema mayor. Las distintas estructuras geométricas euclidianas o no-euclidianas, en tanto que pertenecen a un grupo fundamental, todas por igual gozan de un mismo estatus de validez.

Ahora bien, bajo este nuevo punto de

² Es importante señalar que la idea de liberalización de lo *a priori* hace referencia al movimiento filosófico de principios del siglo XX en el que pensadores como H. Poincaré, E. Cassirer, H. Reichenbach, R. Carnap, entre otros, sentaron las bases de una concepción de lo *a priori* kantiano libre de dos de sus características esenciales, a saber, "la universalidad" y "la necesidad", en este sentido para estos autores lo *a priori* debe ser entendido como conservando sólo su tercera característica "La constitutividad".

vista geométrico, la filosofía tuvo que replantear muchas de sus consideraciones. Es importante señalar, como lo hicimos en el capítulo anterior de este trabajo, que la aparición de las geometrías no-euclidianas a mediados del siglo XIX representadas por los trabajos de Nikolái Lobachevski, Johann Bolyai y particularmente el texto de Riemann *Ueber die Hypothesen, Welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1854/2000) constituyeron una auténtica revolución en la historia del pensamiento gestada en el terreno mismo de las matemáticas. La noción de "hipótesis" empleada en el título del escrito de Riemann, apunta ya directamente al cuestionamiento del estatus de las matemáticas, pues bajo esta nueva concepción los axiomas matemáticos, considerados ya desde la antigüedad como "el prototipo de las verdades eternas", parecía quedar reducido a un tipo de conocimiento hipotético.

Ernst Cassirer, un auténtico pionero del movimiento liberalizador de lo a priori, señaló que esta idea del surgimiento de las nuevas geometrías, no sólo representaba un problema concreto para las matemáticas, sino que además planteaba el problema de la verdad del conocimiento en general (Cassirer, 1907/1950). Todo lo que hasta antes del siglo XIX parecía constituir un acuerdo más o menos común en torno al valor intrínsecamente necesario del conocimiento matemático, comenzó a desmoronarse en cuanto se manifestaron los primeros sistemas de geometría no-euclidiana. En torno a este tema habla el representante de la escuela de Marburgo.

[...] Si la geometría debe su certeza a la razón pura, es extraño que esta razón pueda llegar a sistemas completamente diferentes y totalmente incongruentes, mientras exige la misma verdad para cada uno de

ellos. ¿No cuestiona esto la infalibilidad de la razón en sí? ¿La razón en su esencia no se vuelve contraria y ambigua? Reconocer una pluralidad de geometrías parecía significar renunciar a la unidad de la razón, que es su característica intrínseca y distintiva (Cassirer 1907/1950: 24).

Aceptar la existencia de diferentes geometrías implicaba nada menos que renunciar a la así llamada "unidad de la razón". La simple apelación a la intuición ya no era suficiente para mostrar la superioridad de la geometría euclidiana, pues las geometrías alternas no sólo se colocaban en el mismo plano en cuanto al rigor lógico de la deducción, sino que también perdían terreno en el acostumbrado recurso a la intuición.

Cassirer señala de manera acertada, que el trabajo de Klein fue ampliamente reconocido en este periodo al mostrar que el material de las geometrías no-euclidianas puede ser interpretado en términos de un modelo euclidiano. Y es que, en efecto, Klein dio un paso gigantesco al mostrar que las geometrías no euclidianas, a saber, la geometría hiperbólica, la geometría elíptica etc. se pueden proyectar sobre la geometría euclidia. Las proyecciones kleinianas lograron que desapareciera cualquier ventaja de valor existente entre algún tipo de geometría en particular. Lo que demuestra el trabajo de Klein (1872/2008) es que las diferentes geometrías son parte de una geometría superior, de un "grupo de transformaciones principal" bajo la cual todas podrían ser verdaderas, esta es una de las razones por las que hemos sugerido que resulta imposible no remitirse aquí a las consideraciones kantianas de los escritos pre-críticos en donde Immanuel Kant (1746/1988) concibe una "geometría de orden superior" que contemplaría posibles geometrías de

más de tres dimensiones.

A pesar de que dentro de la filosofía de este periodo se había generado un desconcierto en cuanto a la diversidad de los sistemas geométricos igualmente válidos, dentro del campo de las matemáticas sucedió lo contrario, y pronto, esta idea kleiniana se impuso como la teoría geométrica dominante. Por su parte, Cassirer entendió bien que el problema filosófico derivaba de una vieja concepción substancialista de la noción de "espacio", y en línea con el éxito en geometría, encontró la base central de la idea según la cual, las matemáticas son siempre en el fondo una "teoría de las relaciones"³. Entendidas así, las geometrías podían ser vistas como un complejo sistema de relaciones y ordenaciones que establecerían las reglas de conexión entre objetos sin hacer referencia a la naturaleza en sí de dichas entidades.

El principal obstáculo que enfrentaron algunos filósofos de mediados del siglo XIX, pasaba por la incapacidad de trazar la línea divisoria entre concebir el problema como un problema concerniente a las relaciones y entre concebirlo como un problema meramente ontológico. En palabras de Cassirer:

La matemática es, y siempre será, una ciencia de relaciones puras, y en su forma moderna es precisamente esta característica la que se ha vuelto cada vez más pronunciada. Cuando se mencionan figuras de cualquier tipo y se investiga su naturaleza, la investigación nunca se centra en su existencia real, sino en sus relaciones entre sí, en lo que sólo interesa a las matemáticas. (Cassirer 1907-1950:

26).

El trabajo que Klein realizó en favor de una síntesis de las geometrías desde un punto de vista unitario y sistemático, favoreció el hecho de que las profundas dificultades entre filosofía y matemáticas comenzaran a despejarse. Dado cualquier grupo de transformaciones en el espacio que incluyera el grupo principal como un subgrupo, la teoría invariante de éste proporcionaría un tipo definido de geometría, y toda posible geometría podría ser obtenida en esta forma. Hacia el capítulo 3 de su trabajo de 1907, Cassirer afirma que Klein comenzó desarrollando esta tesis con respecto a los grupos fundamentales que son determinantes para la geometría euclidiana. Como ya mencionábamos, los diferentes tipos de geometría entendidos como sistemas igualmente válidos y rigurosos, restaban valor a la pregunta en torno a cuál de estos era el verdadero. De esta idea se sigue entonces que nuestra estructura cognitiva no está vinculada a un tipo específico de geometría, por el contrario, existe absoluta libertad de adoptar uno u otro sistema según más convenga. Esta misma idea fue la que llevó a Poincaré (1902/1905) a entender que las diferentes geometrías son en algún sentido equivalentes, es decir, alternativas igualmente válidas donde ninguna de estas nos es impuesta por la lógica o la experiencia. Dicha equivalencia es caracterizada mediante la noción de traducción, Poincaré sugirió, igualmente influenciado por el trabajo de Klein, que la equivalencia surge de la posibilidad de traducción de una geometría a otra, es decir encontrando un modelo de una geometría dentro de la otra.

³ Esta idea representa una de las tesis estructuralistas que dieron origen a lo que hoy en día conocemos como Realismo Estructural. Es importante señalar, como se verá más adelante en el capítulo 5 de este trabajo, que las tesis neokantianas y estructuralistas de Poincaré y Cassirer surgen de forma paralela en el mismo contexto de discusión, a saber, el de la liberalización de lo a priori. Y es precisamente por esta razón que es posible hablar de cierta compatibilidad entre la filosofía trascendentalista de Friedman y el Realismo Estructural.

Pero si bien es cierto que, dentro de esta concepción de las matemáticas, las distintas geometrías ostentan el mismo derecho a proclamarse verdaderas en cuanto a su contenido de rigurosidad teórica, no sucede lo mismo con respecto a su generalidad, puesto que existe una especie de gradación jerárquica dentro de la cual la geometría euclidiana encuentra un lugar específico. Partiendo de los distintos grupos de transformación que cada sistema geométrico toma como base, es posible determinar una relación jerárquica puesto que dichos grupos no se encuentran en el mismo plano. Por ejemplo, la geometría proyectiva se encuentra por encima del sistema de la geometría métrica ya que sobre la base del grupo de transformaciones en la cual descansa la geometría proyectiva, abarca como una de sus partes el grupo fundamental sobre el cual se erige la geometría euclidiana.

Ésta última noción de generalidad es lo que permitió a Albert Einstein plantear su propuesta teórica sobre un marco tetra-dimensional, en el que encuentra un lugar específico la noción de "espacio-tiempo", idea que surge a partir del rechazo de la noción de un espacio absoluto independiente del tiempo y el movimiento que implicaba la tesis de la simultaneidad de Einstein. Esta idea de grupo de transformación kleniano, aunada a la incorporación de los resultados del trabajo de Riemann en torno a las variedades de curvatura constante, fue lo que permitió a Hermann Minkowski, interpretar la teoría de la relatividad especial dentro de un marco de geometría lorentziana bajo el cual la geometría euclidiana funcionaría como "aproximación lineal" de la geometría riemanniana.

Sin embargo, este marco geométrico tetra-dimensional aún resultaba insuficiente para la formulación de la nueva

teoría de la gravitación einsteniana desarrollada hacia 1916. Y es que en efecto, la gravedad, según el punto de vista de la teoría de la relatividad general, incorpora, además, las ideas de Riemann en torno a las variedades de curvatura arbitraria. Por lo que una comprensión adecuada de la teoría de la relatividad debe incluir dos principios constitutivos fundamentales, a saber:

1. La incorporación de la noción de grupo y grupo de transformación de Klein dentro de las geometrías no-euclidianas de curvatura constante (geometría hiperbólica de curvatura negativa, geometría elíptica de curvatura positiva y la geometría euclidiana de curvatura cero) dentro del marco de una geometría proyectiva más general.

2. La articulación de la teoría de las variedades de dimensión y curvatura de Riemann, incluido el caso hasta ese momento no contemplado de espacios de curvatura variable.

Ahora bien, ya en el plano de la física, una vez adoptado el nuevo orden geométrico (principios constitutivos), Einstein interpretó el fenómeno de la gravitación como una alteración en el movimiento de un cuerpo ocasionada por la distribución de la materia y la energía dentro del espacio-tiempo, en este sentido, los cuerpos siguen trayectorias geodésicas o líneas de curvatura mínima (en un sentido tetra-dimensional riemanniano). A partir de esta concepción del fenómeno de la gravedad fue que se introdujo en la física moderna la noción de 'espacio-tiempo curvo'. Ahora bien, la aceptación de este concepto sólo se dio en la medida en que, en lo general, superó algunas pruebas empíricas, entre las que se destaca la prueba de la deflexión de los rayos de luz en el experimento de Arthur Stanley Eddington en 1919. Dicho experimento se

planteó bajo el supuesto einsteniano de que la luz tiene peso, de lo que se extrajo la predicción: la luz es atraída y desviada por los cuerpos celestes. Si la teoría de la gravedad einsteniana se hace extensiva a los fenómenos electromagnéticos, y la luz es considerada una onda electromagnética, se sigue entonces que los rayos de luz sufrirían una deflexión ante la presencia de algún campo gravitatorio. Las condiciones de la prueba empírica podrían darse sólo bajo la presencia de un eclipse total de sol, y pues bien, el 29 de mayo de 1919 se produjo un eclipse total de sol que ofreció la oportunidad inmejorable de contrastar las afirmaciones einstenianas. El análisis de las medidas obtenidas de la deflexión de los rayos luminosos, confirmaron la influencia del campo gravitatorio sobre la luz, tal y como predecía la teoría de Einstein. Esta fue la primera vez que la teoría de la relatividad se enfrentaba a lo que Quine denominó "el tribunal de la experiencia".

Desde el punto de vista de un neo-transcendentalista como Friedman, es posible plantearse una pregunta central, si en efecto, después de los resultados del experimento de 1919, ¿la base geométrica de la teoría se enfrenta de la misma forma que el resto de los elementos a la contrastación empírica?, la respuesta de Friedman desde luego es negativa, puesto que el rol que jugó la teoría de grupos de transformación kleniana y la teoría riemaniana de las variedades n-dimensionales dentro de la teoría de la relatividad fue particularmente distinto al que jugaron el resto de los elementos teóricos. El rol que asumió el subyacente contenido de algunos elementos geométricos dentro de la teoría de la relatividad fue un rol distintivamente constitutivo, en el sentido de que, como revisamos más arriba, algunos de los elementos de ambas teorías geométricas

resultan fundamentalmente imprescindibles para la formulación de la teoría einsteniana. Sin este trasfondo geométrico, simplemente los conceptos de "gravedad" y "espacio-tiempo curvo" sobre los cuales descansa la teoría de la relatividad einsteniana no tendrían sentido. Además, fue precisamente este trasfondo geométrico-matemático de la teoría lo que generó el espacio de posibilidad empírica.

Friedman (2001) acierta en atribuir a Kant la interpretación del conocimiento a priori como el suministro de las presuposiciones o condiciones de posibilidad del conocimiento empírico, como el que hace posible formular y justificar afirmaciones empíricas objetivas sobre la naturaleza dada. Y es que en el versículo 30 de los prolegómenos, Kant (1783/2004) en efecto, se refiere al rol constitutivo de la parte propiamente a priori del conocimiento en el mismo sentido en el que se ha sugerido en este escrito, puesto que se hace referencia al rol que juegan las matemáticas dentro de las teorías científicas. Kant modeló su teoría de la constitutividad *a priori*, como condición de posibilidad de la experiencia, sobre la física newtoniana, no obstante, como señalamos anteriormente, fue a partir de los desarrollos revolucionarios que tuvieron lugar tanto en física como en matemáticas a finales del siglo XIX y principios del XX, que hoy podemos entender esta constitutividad a priori como algo revisable y no meramente estático, universal y necesario, lo cual no significa que la función de los marcos geométricos subyacentes a las teorías no cumplan con este rol particular de constitutividad. La teoría de la relatividad einsteniana, tanto la especial como la general, tal y como revisamos, simplemente no son posibles de formular o justificar empíricamente sin el marco matemático establecido en función de las nociones de grupo de transformaciones y

las variedades de curvatura introducidas por Klein y Riemann respectivamente. El marco matemático que permite la formulación de las teorías científicas demuestra que no es posible concebirlas simplemente como grandes conjunciones que se enfrentan por igual a las pruebas empíricas, por el contrario, la realización de dichas pruebas es posibles debido al rol a priori constitutivo que algunos elementos juegan dentro de las teorías científicas, tal es el caso de los marcos geométricos.

Agradecimientos

Esta investigación fue soportada por el proyecto de fortalecimiento de cuerpos académicos (UMAR-CA-38), convocatoria 2020, financiado por el Programa para el Desarrollo Profesional Docente, para el Tipo Superior (PRODEP). A dos revisores anónimos quienes aportaron valiosos comentarios para mejorar el presente trabajo.

Referencias

- Cassirer, E. 1907/1950.** The problem of Knowledge: Philosophy, Science, and History Since Hegel. Yale University Press.
- Devitt, M. 1996.** Coming to Our Sense: A Naturalistic Program for Semantic Localism. Cambridge: University Press.
- Friedman, M. 2001.** Dynamics of Reason: The 1999 Kant Lectures at Stanford University. Stanford: CSLI Publications.
- Kant, I. 1746/1988.** Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte und Beurtheilung der Beweise, derer sich Herr von Leibnitz und andere Mechaniker in dieser Streitsache bedienen haben. Trad. al castellano por Arana J. Berna, Pensamientos sobre la verdadera estimación de las fuerzas vivas. Editorial Peter Lang.
- Kant, I. 1783/2004.** Prolegomena to Any Future Metaphysics. Cambridge: University Press.
- Klein, F. 1872/2008.** "A Comparative Review of Recent Researches in Geometry". Nitin C. Rughoonauth. New York Math. Soc. 2, (2008), 215-249.
- Papineau, D. 1993.** Philosophical Naturalism. Cambridge: University Press.
- Poincaré, H. 1902/1905.** Science and Hypothesis. The Walter Scott Publishing CO., LTD. New York: 3 East 14TH Street. 1905.
- Quine, W. V. O. 1951.** "Main Trends in Recent Philosophy: Two Dogmas of Empiricism". The philosophical Review, 60(1), 20-43.
- Riemann, B. 1854/2000.** Ueber die Hypothesen, Welche der Geometrie Zu
- Grunde, L. 2000.** Traducido al ingles por William Kingdon Clifford como On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry. Transcribed by D.R. Wilkins Preliminary version: december 1998 corrected: April 2000: <https://www.emis.de/classics/riemann/geom.pdf>.